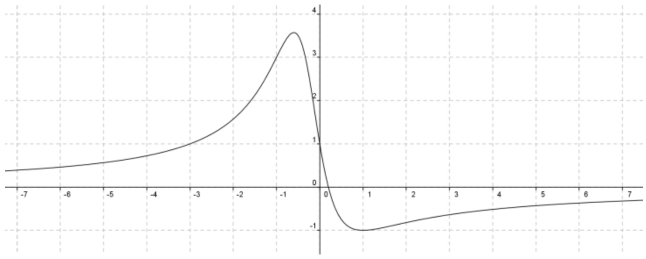
1S	CORRIGÉ DU DEVOIR N°1 : Le second degré	19/09/2012
Lah		

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-5x+1}{2x^2+x+1}$.



Ensemble de définition de f : recherche des valeurs interdites, on résout : $2x^2 + x + 1 = 0$

Discriminant : $\Delta = 1 - 8 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Courbe comprise dans une bande d'amplitude 5 :

D'après le graphique, on peut conjecturer que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

On doit alors résoudre deux inéquations :

1) $\frac{-5x+1}{2x^2+x+1} \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \frac{-5x+1}{2x^2+x+1} + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1} \geqslant 0$

Le dénominateur est de signe strictement positif (voir recherche des valeurs interdites), il suffit donc d'étudier le signe du numérateur. Discriminant : $\Delta = 16 - 16 = 0$ donc le trinôme a une unique racine : $\frac{4}{4} = 1$.

Le trinôme $2x^2 - 4x + 2$ est donc positif ou nul sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : L'ensemble solution de $\frac{-5x+1}{2x^2+x+1} \geqslant -1$ est $\mathbb{R}$.

2) $\frac{-5x+1}{2x^2+x+1} \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \frac{-5x+1}{2x^2+x+1} - 4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-8x^2-9x-4}{2x^2+x+1} \leqslant 0$

Il suffit d'étudier le signe du numérateur. Discriminant : $\Delta = 81 - 128 = -47$ donc le trinôme n'a pas de racine.

Le trinôme $-8x^2 - 9x - 4$ est donc strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : L'ensemble solution de $\frac{-5x+1}{2x^2+x+1} \leqslant 4$ est $\mathbb{R}$.

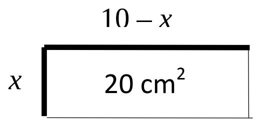
Finalement, nous avons prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

EXERCICE 2

1. On dispose d'une baguette de bois de 10 cm de long. Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface 20 cm^2 ?

On résout : $x(10 - x) = 20 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 20 = 0$

Discriminant : $\Delta = 100 - 80 = 20$



$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-10-\sqrt{20}}{-2} = \frac{-10-2\sqrt{5}}{-2} = 5 + \sqrt{5}$

$x_2 = \frac{-10+\sqrt{20}}{-2} = \frac{-10+2\sqrt{5}}{-2} = 5 - \sqrt{5}$

Il y a deux possibilités : on peut briser la baguette à $5 + \sqrt{5}$ cm ou $5 - \sqrt{5}$ cm.

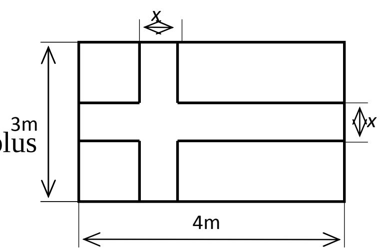
2. Même question ; où briser la baguette pour avoir un rectangle de 40 cm^2 ?

On résout : $x(10 - x) = 40 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 40 = 0$. Discriminant : $\Delta = 100 - 160 = -60$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

EXERCICE 3

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau ?



L'aire de la croix est égale à la somme des aires des deux bandes moins l'aire du petit carré d'intersection (qu'on a compté deux fois) : $4x + 3x - x^2$

Cette aire doit être inférieure ou égale à la moitié de l'aire du drapeau (sinon elle est plus grande que l'aire restante).

On obtient alors l'inéquation : $-x^2 + 7x \leqslant 6$

On résout : $-x^2 + 7x - 6 \leqslant 0$

Discriminant : $\Delta = 49 - 24 = 25$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-7-5}{-2} = 6$ et $x_2 = \frac{-7+5}{-2} = 1$

Or x varie dans l'intervalle [0 ; 3] on fait le tableau de signes (signe négatif à l'extérieur des racines) :

x	0		1		3
$f(x)$		–	0	+	

Conclusion : Pour que l'aire de la croix soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau, il faut que sa largeur soit inférieure ou égale à 1 cm.