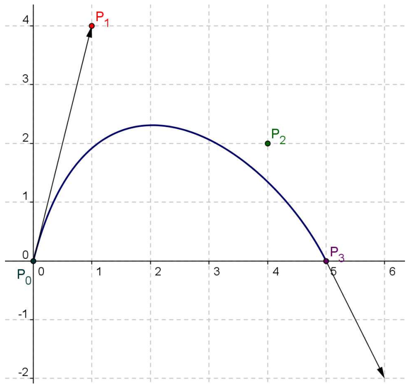
COURBES DE BÉZIERS

On dispose de $n + 1$ points du plan appelés points de contrôle : P_0 , P_1 , P_2 , … P_n
Le but de ce chapitre est de trouver une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ qui satisfait aux contraintes suivantes liées à ces $n +1$ points :

- La courbe paramétrée $\mathscr{C}$ débute en P_0 et finit en P_n.
- Le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ est un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en P_0.
- Le vecteur $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en P_n.
- Les points intermédiaires P_1 , P_2 , … P_{n-1} servent à définir la concavité de la courbe par des calculs barycentriques successifs.

Un exemple de courbe de Béziers définie par quatre points de contrôle :



I. POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$, les $n +1$ polynômes de Bernstein de degré n sont :
Pour tout entier $i \in [0 ; n]$, $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$

Exercice :
Calculer les trois polynômes de Bernstein de degré2 :

Calculer les quatre polynômes de Bernstein de degré 3

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0 ; 1]$: $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$

Exercice : Prouver la propriété ci-dessus pour $n = 3$

DMartin-LAH

II. RAPPELS SUR LES BARYCENTRES

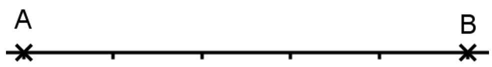
A. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

Vocabulaire :
Un point pondéré est un couple (A , α) où A est un point du plan (ou de l'espace) et α un nombre réel.

Définition - Théorème : Soient a et b deux nombres réels tels que $a + b \neq 0$.
On appelle barycentre des deux points pondérés (A , a) et (B , b) l'unique point G qui vérifie : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
Si $a = b$ alors G s'appelle l'isobarycentre de A et B, c'est le milieu de [AB].

Théorème : construction du barycentre de deux points
Soit G le barycentre des deux points pondérés (A , a) et (B , b) avec $a + b \neq 0$.
Pour tout point M on a : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a + b)\,\overrightarrow{MG}$
En choisissant M = A, on a la relation qui permet de construire G : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$

Exemple : Construire le barycentre de (A , 2) et (B , 3)

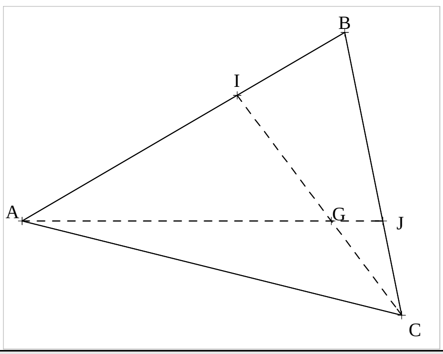


B. BARYCENTRE DE TROIS POINTS ET PLUS

Proposition : On définit le barycentre G de n points pondérés (A_1 , a_1), (A_2 , a_2), … , (A_n , a_n) avec $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$
par : $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\,\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$
Pour tout point M on a : $a_1\,\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + a_n\,\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,\overrightarrow{MG}$

Théorème : construction du barycentre de trois points (associativité du barycentre)
Si G est le barycentre des trois points pondérés (A , a), (B , b) et (C , c) avec $a + b + c \neq 0$.
En notant I le barycentre des deux points pondérés (A , a) et (B , b) avec $a + b \neq 0$ alors G est aussi le barycentre des deux points pondérés : (I , $a + b$) et (C , c).

Exemple :
On veut construire le barycentre du système pondéré (A , 1) (B , 2) et (C , 4).
Pour cela on peut construire d'abord le barycentre partiel I de (A , 1) (B , 2) puis on construit G barycentre de (I , 3) (C , 4).
On peut aussi construire le barycentre partiel J de (B , 2) (C , 4) puis on construit le barycentre G de (J , 6) (A , 1).
Donner une troisième possibilité de construction : (Tracer la situation sur la figure)



Proposition : construction du barycentre de quatre points et plus
Soit G le barycentre des quatre points pondérés (A , a), (B , b), (C , c) et (D,d) avec $a + b + c + d \neq 0$.
On note I le barycentre des deux points pondérés (A , a) et (B , b) avec $a + b \neq 0$ et J le barycentre de (C , c) et (D,d) avec $c + d \neq 0$.
Alors G est aussi le barycentre des deux points pondérés : (I , $a + b$) et (J , $c + d$).
Pour le barycentre de plus de points on utilise l'associativité autant de fois que nécessaire.

Exemple : Construire le barycentre de (A, 1) (B, 3) (C, 3) (D , 5)